Übungsblatt 3

14. November 2019
Abelianisierung, Automorphismen freier Gruppen

Zusätzliche Hausaufgaben (Abgabe bis Mo., 25.11.)

Aufgabe H1

(Jede Gruppe hat eine 'abelsche Version'.) Der *Kommutator* von zwei Elementen g, h aus einer Gruppe G ist das Element $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Betrachte zunächst die *Kommutatoruntergruppe* (auch *abgeleitete Untergruppe* gennant)

$$[G, G] := \langle \{[g, h] \mid g, h \in G\} \rangle.$$

(Notation: $[G, G]$ oder G'.) Das heißt, $[G, G]$ ist die von *allen* Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G.

a) Beweisen Sie, dass $[G, G]$ ein Normalteiler von G ist.

b) Allgemeiner zeigen Sie, dass das Bild $\phi([G, G])$ unter einem beliebigen Automorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ immer noch in $[G, G]$ enthalten ist. (Eine Untergruppe mit solcher Eigenschaft wird *charakteristische Untergruppe* gennant.)

Der Quotient $G/[G, G]$ wird die *Abelianisierung von* G genannt.

Aufgabe H2

Bestimmen Sie die Abelianisierung folgender Gruppen. (*Tipp*: Für eine beliebige Präsentierung $G = \langle X \mid R \rangle$, leiten Sie zunächst eine Präsentierung von $G/[G, G]$ her.)

a) Diedergruppe D_n.

b) Freie Gruppe $F(X)$.

c) Flächengruppe $\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle$ (siehe Vorlesungsnotizen).

Aufgabe H3

(Flächen von verschiedenen Geschlechten sind topologisch nicht äquivalent.) Aus der niedrig-dimensionalen Differentialgeometrie oder Topologie hat man folgenden Satz: "Sind zwei geschlossene Fläche homöomorph, dann haben sie isomorphe Fundamentalgruppen." Die in der Vorlesung definierte Flächengruppe $\pi_1(S_g)$ ist die Fundamentalgruppe der geschlossenen Fläche S_g vom Geschlecht g. Verwenden Sie den obigen Satz und die Aufgabe **H2c** um zu zeigen, dass zwei Flächen S_g und $S_{g'}$ mit $g \neq g'$ *nicht* homöomorph sein können.

Aufgabe H4

Zeigen Sie mithilfe der Aufgabe **H2b**, dass es eine Abbildung $\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ von der Automorphismengruppe der freien Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$ nach der n-dimensionalen ganzzahligen allgemeinen linearen Gruppe existiert. (*Siehe zusätzliche Materialien zu Automorphismen freier Gruppen.*)

Aufgabe H5

Sei $F_3 = \langle a, b, c \mid \varnothing \rangle$ die freie Gruppe vom Rang 3 und sei $\phi \in \mathrm{Aut}(F_3)$ ihr Automorphismus mit $\phi(a) = b$, $\phi(b) = c$ und $\phi(c) = (abc)^{-1}$. Betrachten Sie die entsprechende Abbildung $f : a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ auf der 3-Rose mit Kantenmarkierungen a, b, c. Zeigen Sie, dass f keine Train-Track-Abbildung ist. Verwenden Sie dann das Bestvina–Handel-Verfahren, um einen Train-Track-Representanten f' von ϕ zu basteln. (*Siehe zusätzliche Materialien zu Automorphismen freier Gruppen.*)