Übungsblatt 5

13. Januar 2020

Hyperbolische Ebene, quasi-Geodäten, das Dehnsche Wortproblem

Präsenzaufgaben (zur Bearbeitung in der Übungsgruppe)

Aufgabe P1

Betrachte die ganzzahlige *spezielle projektive Gruppe* $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Das heißt, $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist derjenige Quotient von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(g) = 1\}$, den man durch die Identifizierung von $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ erhält. Die Elemente aus $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind also die Nebenklassen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Definiere eine Wirkung von $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Man sieht nach Definition, dass die typischen Elemente von $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zwei Repräsentanten haben, nämlich $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{smallmatrix}\right]$. Zeigen Sie, dass die gegebene Wirkung $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ *wohl-definiert* ist (d.h. Unabhängig von der Wahl der Repräsentanten) und tatsächlich eine Wirkung ist.

b) Der hyperbolische Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{H}^2$ ist gegeben durch $d(x,y) = \ln\left(\frac{|x-\bar{y}| + |x-y|}{|x-\bar{y}| - |x-y|}\right)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}^2$ durch Isometrien wirkt, also $d(g\cdot x, g\cdot y) = d(x,y)$ für alle $g \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $x, y \in \mathbb{H}^2$.

Aufgabe P2

Betrachten Sie das hyperbolische Dreieck mit Ecken $A = -3+4i, B = 5i, C = i \in \mathbb{H}^2$.

a) Skizzieren Sie in $\mathbb{H}^2$ die Gerade von A nach B sowie das gegebene Dreieck ΔABC.

b) Definiere nun eine Wirkung der *reellen* speziellen projektiven Gruppe $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}^2$ genau wie bei der Aufgabe 1 mit $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Z}$. Berechnen und skizzieren Sie die Dreiecke $g \cdot \Delta ABC$ für

$$g \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5\sqrt{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Ist diese Wirkung auch durch Isometrien?

Aufgabe P3

Es seien (X, d) ein geodätischer metrischer Raum und $\gamma : [0, L] \to X$ eine (c, b)-quasi-Geodäte. Zeigen Sie, dass es eine *stetige* (c', b')-quasi-Geodäte $\gamma' : [0, L] \to X$ gibt mit denselben Endpunkten wie γ und den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $s, t \in [0, L]$ mit $s \leq t$ gilt $\ell(\gamma'|_{[s,t]}) \leq c' \cdot d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'$;
2. γ und γ' sind nah aneinander, genauer $\mathrm{Bild}(\gamma') \subset B_{c+b}(\mathrm{Bild}(\gamma))$ und $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset B_{c'+b'}(\mathrm{Bild}(\gamma'))$.

Hausaufgaben (Geben Sie Ihre Lösung spätestens zum Anfang der nächsten Übungsgruppe ab.)

Aufgabe H1

Wir betrachten weiter die Wirkung $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ aus den Präsenzaufgaben **P1**, **P2**.

a) Zeigen Sie, dass sich für $c \neq 0$ die Fixpunkte $z \in \mathbb{H}^2$ eines Elements $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit der Formel

$$z = \frac{a-b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

berechnen lassen.

b) Geben Sie auch die Fixpunkte von $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ für den Fall $c = 0$ an.

Aufgabe H2

Betrachten Sie die Präsentierung $\langle a, b \mid a^2, b^3, ab^{-1}ab^{-1} \rangle$. Ist das eine Dehn-Präsentierung? Wenn ja, warum? Wenn nein, bestimmen Sie eine Dehn-Präsentierung, falls eine existiert.

Aufgabe H3

Beweisen Sie, dass das Wortproblem für freie Gruppen lösbar ist und schreiben Sie einen Algorithmus (oder einen Pseudocode) auf, der das Wortproblem von F_n löst.